28 圓錐曲線上的格子點問題

本文的主要目的是要探討圓錐曲線上的格子點問題。底下是整數論常用有關因數，倍數的一個引理：若 d 為正整數，a,b 為整數且 $d \mid a, d \mid b$，則

$$d \mid am+bn,$$

其中 m,n 為整數。

例題 28.1 設分數 $\dfrac{x9}{9y}$ 與分數 $\dfrac{x}{y}$ 相等，其中 x,y 為阿拉伯數字。試求 x,y 的值？

【解】由題意知

$$\begin{aligned}\frac{10x+9}{90+y}=\frac{x}{y} &\Rightarrow 9xy-90x+9y=0\\ &\Rightarrow xy-10x+y=0\\ &\Rightarrow (x+1)(y-10)=-10.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{array}{c|ccc} x+1 & 2 & 5 & 10 \\ \hline y-10 & -5 & -2 & -1 \end{array} \Rightarrow (x,y)=(1,5),(4,8),\ 或\ (9,9).$$

例題 28.2 設 m,n 為正整數且

$$\frac{n^3+1}{mn-1}$$

亦為正整數。試確定 m,n 的值。

【解】由 $(mn-1) \mid (n^3+1), (mn-1) \mid (mn-1)$ 得

$$\begin{cases}(mn-1) \mid (n^3+1)m-(mn-1)n^2=n^2+m,\\ (mn-1) \mid (n^3+1)m^3-(mn-1)(m^2n^2+mn+1)=m^3+1.\end{cases}$$

故

$$\frac{n^3+1}{mn-1},\frac{m^3+1}{mn-1},\frac{n^2+m}{mn-1}$$

皆為正整數。由於 m,n 對稱的關係，我們假設 $m \ge n \ge 1$。又 m,n 不可能同時是 1，所以

有 $m \le 2(mn-1)$ 及 $n^2 \le mn \le 2(mn-1)$。故得

$$\frac{n^2+m}{mn-1}=1,2,3,\text{ 或 }4.$$

(1) 若

$$\frac{n^2+m}{mn-1}=1,$$

則 $(n-1)(m-n-1)=2$，即 $(m,n)=(5,2),(5,3)$。

(2) 若

$$\frac{n^2+m}{mn-1}=2,$$

則 $(2n-1)(4m-2n-1)=9$，即 $(m,n)=(2,2),(3,1)$。

(3) 若

$$\frac{n^2+m}{mn-1}=3,$$

則 $(3n-1)(9m-3n-1)=28$，即 $(m,n)=(2,1)$。

(4) 若

$$\frac{n^2+m}{mn-1}=4,$$

則 (m,n) 無解。

由對稱的關係可得到另外四組解

$$(m,n)=(2,5),(3,5),(1,3),(1,2).$$

因此共有

$$(m,n)=(5,2),(2,5),(5,3),(3,5),(2,2),(3,1),(1,3),(2,1),(1,2)$$

九組正整數解。

習題 28.1　三角形 ABC 是邊長為 15 的正三角形，P 為 BC 邊上的點。若線段長 PA,PB,PC 均為正整數，試求線段 PA 的長度。

習題 28.2　若分數 $\dfrac{x6}{6y}$ 與分數 $\dfrac{x}{y}$ 相等，其中 x, y 為阿拉伯數字。試求 x, y 的值？

習題 28.3　若分數 $\dfrac{x99}{99y}$ 與分數 $\dfrac{x}{y}$ 相等，其中 x, y 為阿拉伯數字。試求 x, y 的值？

習題 28.4　試求

$$x^2 - y^2 = 611$$

的正整數解 x, y 。

習題 28.5　試求

$$(m^2+n)(m+n^2)=(m+n)^3$$

的正整數解 m, n 。

動手玩數學

任意給定 7 個整數（可以相同），是否必有 4 個的和為 4 的倍數。

挑戰題

如果 p 是奇質數且滿足

$$\frac{2^{p-1}-1}{p}$$（根據費馬小定理，此數為正整數）

是一個完全平方數。試求 p 的值。

阿廷-邱拉猜想

如果 p 是一個被 4 除之餘數為 1 的質數且正整數 x, y 是滿足

$$x^2 - py^2 = 4$$

且離原點最近的正整數解，則 p 不能整除 y。這是有名的阿廷-邱拉猜想。